

# TD<sub>22</sub> – Propriétés métriques des courbes planes

## Exercice 1 ★

On considère la fonction  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $h : t \mapsto t\sqrt{t}$ . Calculer la longueur de la courbe représentative de  $h$ .

## Exercice 2 ★

Déterminer le rayon de courbure au sommet de l'hyperbole d'équation  $xy = k$  où  $k$  est un réel strictement positif fixé.

## Exercice 3 ★★

La lemniscate de Bernoulli a pour équation :

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$

1. Tracer cette courbe.
2. Déterminer le cercle de courbure en tout point.

## Exercice 4 ★★★

Déterminer le repère de Frénet et la développée de la courbe plane  $(C)$  paramétrée dans un repère orthonormé par :

$$\begin{cases} x = \cos^2(t) + \ln |\sin(t)| \\ y = \sin(t) \cos(t) \end{cases}$$

## Exercice 5 ★★

Déterminer le repère de Frénet et la développée de la courbe plane donnée dans un repère orthonormé par l'équation cartésienne :  $y = a \ln \left( \cos \left( \frac{x}{a} \right) \right)$ , où  $a$  est un réel strictement positif fixe, et  $|x| < a \frac{\pi}{2}$ .

## Exercice 6 ★★★

Un point  $M$  décrit un cercle  $(C)$  de rayon  $R$ .

1. Soit  $A$  et  $B$  les projections orthogonales de  $M$  sur deux diamètres perpendiculaires de  $(C)$ . Déterminer et représenter le lieu  $(\Gamma)$  de la projection orthogonale de  $M$  sur la droite  $(AB)$ .
2. Déterminer l'enveloppe des droites  $(AB)$ .
3. Déterminer et tracer la développée de  $(\Gamma)$ .

## Exercice 7 ★★

La deltoïde est la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) + \sin(2t) \end{cases}$$

1. Étudier et tracer cette courbe.
2. Déterminer et tracer sa développée.

## Exercice 8 ★★

Déterminer la développée de la courbe  $\Gamma$  de paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = 2 \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = 3 \operatorname{sh}(t) \end{cases}$$

## Exercices issus d'oraux

---

### Exercice 9 ★★ ★ (Oral 2007)

Soit  $(C)$  paramétrée par  $x(t) = 3 \cos(t) + 3 \cos(2t) + \cos(3t)$  et  $y(t) = 3 \sin(t) + 3 \sin(2t) + \sin(3t)$ .

1. Tracer la courbe  $(C)$ .
  2. Déterminer la longueur de  $(C)$ .
  3. Déterminer la développée de  $(C)$ .
- 

### Exercice 10 ★★ ★ (Oral 2010)

Soit  $\Gamma$  la courbe d'équation  $y = \ln(x)$ .

1. Déterminer la développée de  $\Gamma$ .
  2. En quel point de  $\Gamma$  le rayon de courbure est-il minimal (en valeur absolue) ?
- 

### Exercice 11 ★★ ★ (Oral 2018)

Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère  $f_n$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{ch}(nx)$ . On note  $C$  la courbe représentative de  $f_n$  et  $\Gamma$  sa développée.

1. Trouver la longueur de  $C$ .
2. Trouver un paramétrage de  $\Gamma$ .
3. Trouver la longueur de  $\Gamma$ .

**Corrigés des exercices** Dans tout le corrigé on assimilera les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  à la matrice de leurs coordonnées dans le repère orthonormé canonique  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Corrigé de l'exercice 1

La courbe représentative de  $h$  se paramètre par  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = h(t) = t\sqrt{t} \end{cases}$ .

Sa longueur est alors

$$\begin{aligned} L_h(0, 1) &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + 9t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{9} \frac{2}{3} (4 + 9t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{(4 + 9)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}}{27} \\ &= \frac{13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}}{27} \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 2

L'hyperbole admet pour axe focal la première bissectrice. Ses sommets sont les intersections de l'hyperbole avec la première bissectrice. Ils ont pour coordonnées  $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$  et  $(-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$ .

On paramètre l'hyperbole par  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{k}{t} \end{cases}$ .

Ainsi  $\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2}{t^4}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{t^4 + k^2}} \begin{pmatrix} t^2 \\ -k \end{pmatrix}$  et  $\vec{N}(t)$  a pour coordonnées  $\frac{1}{\sqrt{t^4 + k^2}} \begin{pmatrix} k \\ t^2 \end{pmatrix}$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds}(t) &= \frac{1}{s'(t)} \vec{T}'(t) \\ &= \frac{t^2}{\sqrt{t^4 + k^2}} \left( \frac{-4t^3}{2(t^4 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} t^2 \\ -k \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{t^4 + k^2}} \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{t^2}{(t^4 + k^2)^2} \left( \begin{pmatrix} -2t^5 \\ 2kt^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t(t^4 + k^2) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{t^2}{(t^4 + k^2)^2} \begin{pmatrix} 2k^2t \\ 2kt^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2kt^3}{(t^4 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{N}(t) \end{aligned}$$

On a ainsi  $\gamma(t) = \frac{2kt^3}{(t^4 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$  et donc, pour  $t \neq 0$ ,  $R(t) = \frac{(t^4 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{2kt^3}$ .

En particulier pour  $t = \sqrt{k}$ , on a  $R(\sqrt{k}) = \sqrt{2k}$  et pour  $t = -\sqrt{k}$ ,  $R(-\sqrt{k}) = -\sqrt{2k}$ .

### Corrigé de l'exercice 3

1. Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Elles sont toutes les deux impaires, on étudie donc la courbe sur  $\mathbb{R}^+$  et on obtient le support complet par symétrie par rapport à  $O$ .

On a de plus  $x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t)$  et  $y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$ . On va donc étudier la courbe sur  $[0, 1]$  et on obtiendra son support sur  $[1, +\infty[$  par symétrie par rapport à la première bissectrice.

$$\forall t \in [0, 1], \quad x'(t) = \frac{1 - 3t^4}{(1 + t^4)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{t^2(3 - t^4)}{(1 + t^4)^2}$$

$x$  est croissante sur  $\left[0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 1\right]$ .  $y$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

On a  $y'(0) = 0$ , donc la tangente au point de paramètre 0 est horizontale. Comme  $x'\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$  il y a une tangente verticale au point de paramètre  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ . Enfin on a  $x'(1) = -\frac{1}{2}$  et  $y'(1) = \frac{1}{2}$ , la tangente au point de paramètre 1 est donc dirigée par  $\vec{j} - \vec{i}$ , elle est ainsi perpendiculaire à la première bissectrice

Figure .1 – Tracé sur  $[0, 1]$

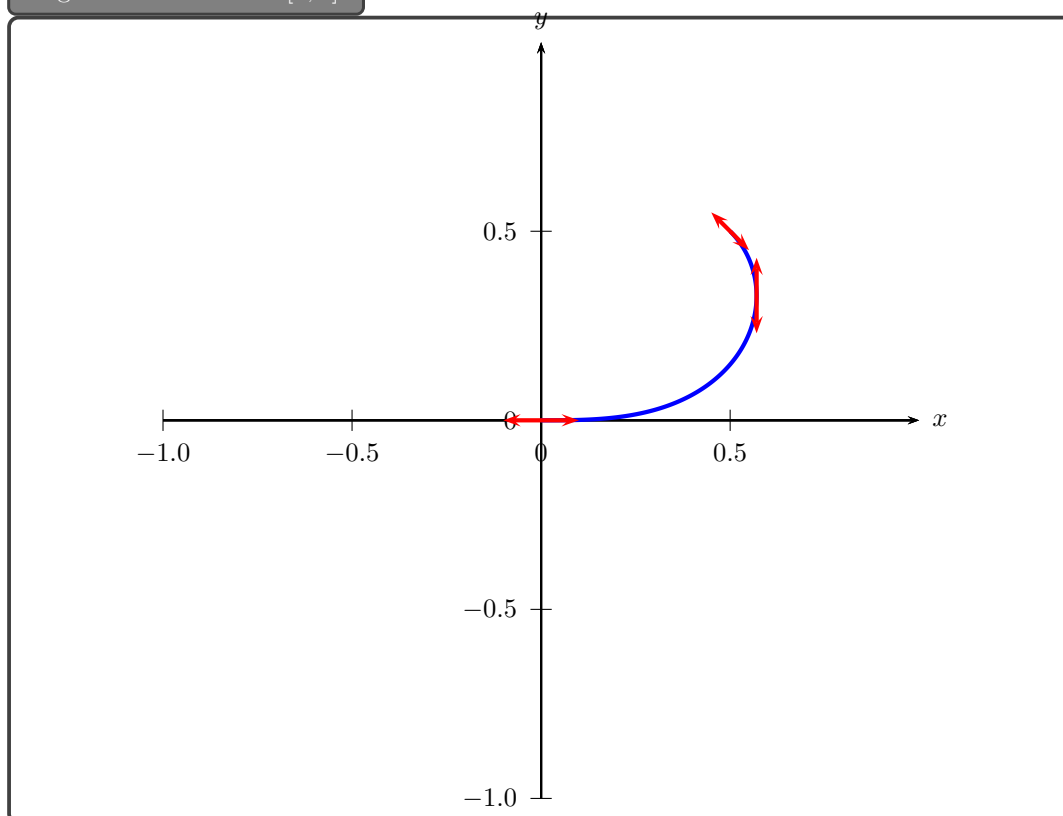
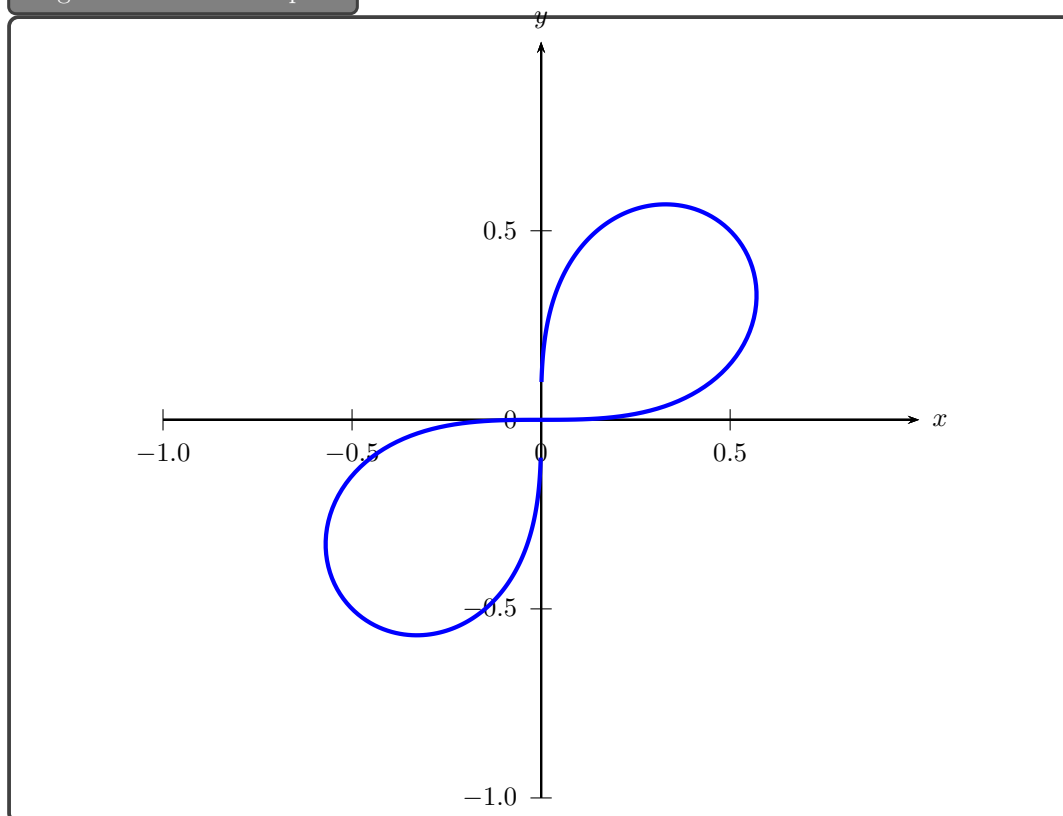


Figure .2 – Tracé complet



2. Le repère de Frénet associé à cette courbe est

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-3t^4)^2 + t^4(3-t^4)^2}} \begin{pmatrix} 1-3t^4 \\ t^2(3-t^4) \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1-3t^4 \\ t^2(3-t^4) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(t) = \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} t^2(t^4-3) \\ 1-3t^4 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds}(t) &= \frac{1}{s'(t)} \vec{T}'(t) \\ &= \sqrt{1+t^4} \left( \frac{-6t^3}{(1+t^4)^{\frac{5}{2}}} \begin{pmatrix} 1-3t^4 \\ t^2(3-t^4) \end{pmatrix} + \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -12t^3 \\ 6t(1-t^4) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+t^4)^2} \left( -6t^3 \begin{pmatrix} 1-3t^4 \\ t^2(3-t^4) \end{pmatrix} + (1+t^4) \begin{pmatrix} -12t^3 \\ 6t(1-t^4) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+t^4)^2} \begin{pmatrix} -18t^3 + 6t^7 \\ -18t^5 + 6t \end{pmatrix} \\ &= \frac{6t}{(1+t^4)^2} \begin{pmatrix} t^2(t^4-3) \\ 1-3t^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{6t}{\sqrt{1+t^4}} \vec{N}(t) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \gamma(t) = \frac{6t}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$\text{Pour } t \neq 0 \text{ on a alors } R(t) = \frac{\sqrt{1+t^4}}{6t}.$$

Le centre du cercle de courbure s'obtient par  $M(t) + R(t)\vec{N}(t)$ , il s'agit donc du point  $\Omega(t)$  de coordonnées

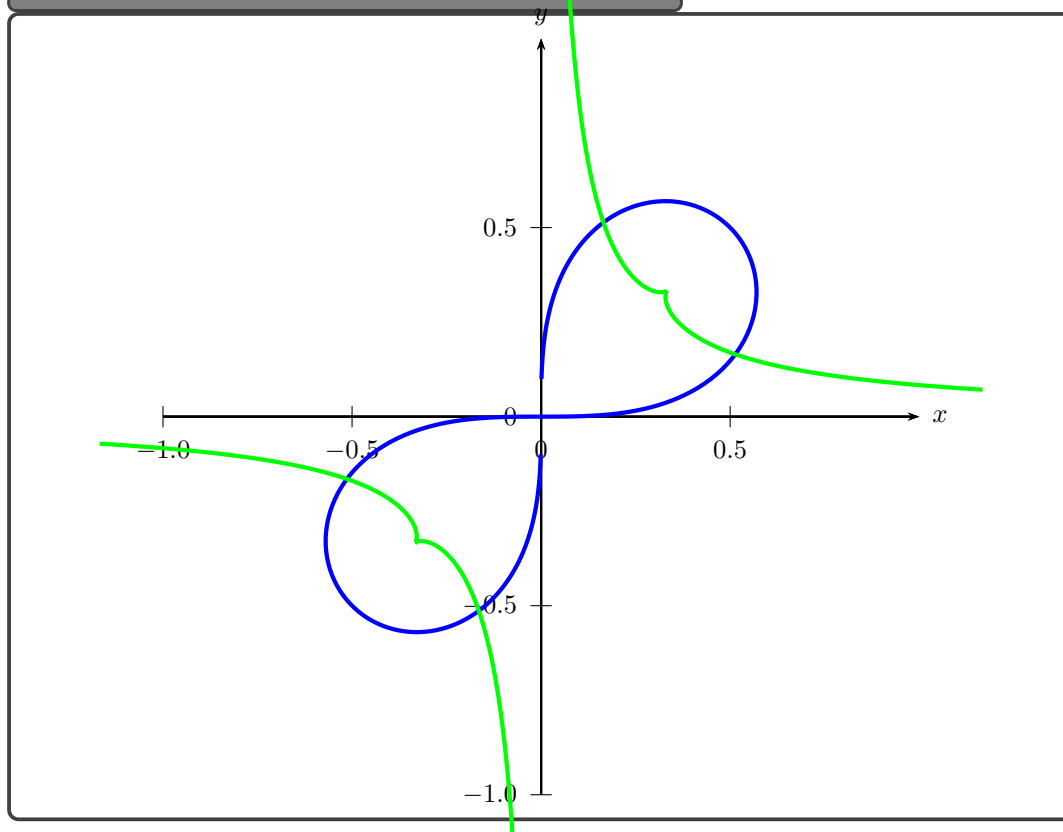
$$\left( \frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right) + \frac{\sqrt{1+t^4}}{6t} \frac{1}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}} (t^2(t^4-3), 1-3t^4) = \frac{1}{6t(1+t^4)} (t^6+3t^2, 1+3t^4)$$

Le cercle de courbure est ainsi le cercle de centre  $\Omega(t)$  de coordonnées  $\frac{1}{6t(1+t^4)} (t^6+3t^2, 1+3t^4)$

$$\text{et de rayon } R(t) = \frac{\sqrt{1+t^4}}{6t}$$

On peut tracer la développée de notre courbe

Figure .3 – Lemniscate en bleu, sa développée en vert



### Corrigé de l'exercice 4

— Étudions d'abord  $(C)$  :  $x$  est  $\pi$ -périodique et paire,  $y$  est  $\pi$ -périodique et impaire.

On va ainsi limiter notre étude à  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et on obtiendra le support total par la symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$

Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$x'(t) = -2 \cos(t) \sin(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \cos(t) \frac{-2 \sin(t)^2 + 1}{\sin(t)} = \frac{\cos(2t) \cos(t)}{\sin(t)} \quad y'(t) = \cos(t)^2 - \sin(t) = \cos(2t)$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

|         |                                                                                                    |                 |                 |   |   |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------|---|---|
| $t$     | 0                                                                                                  | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |   |   |
| $x'(t)$ | <div><div></div><div></div></div>                                                                  | +               | 0               | − | 0 |
| $x(t)$  | <div><div><math>-\infty</math></div><div><math>\frac{1 - \ln(2)}{2}</math></div><div>0</div></div> |                 |                 |   |   |
| $y(t)$  | <div><div>0</div><div><math>\frac{1}{2}</math></div><div>0</div></div>                             |                 |                 |   |   |
| $y'(t)$ |                                                                                                    | +               | 0               | − |   |

Un développement limité en  $\frac{\pi}{4}$  montre qu'on y trouve un rebroussement de première espèce.

- On se contente de l'étude sur  $]0, \frac{\pi}{2}]$ , on obtiendra également la développée de la courbe pour  $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$  par la symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$ .

On a

$$\vec{T}(t) = \frac{|\sin(t)|}{|\cos(2t)|} \begin{pmatrix} \cos(2t) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } s'(t) = \frac{|\sin(t)|}{|\cos(2t)|} = \frac{\sin(t)}{\cos(2t)}.$$

On peut écrire  $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$  avec  $\alpha(t) = t$

On a alors  $\gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{\sin(t)}{\cos(2t)}$  et donc  $R(t) = \frac{\cos(2t)}{\sin(t)}$

Le centre de courbure  $C(t)$  a alors pour coordonnées

$$(\cos^2(t) + \ln|\sin t|, \sin(t) \cos(t)) + \frac{\cos(2t)}{\sin(t)} (-\sin(t), \cos(t)) = \left( \sin^2(t) + \ln|\sin t|, \frac{\cos^3(t)}{\sin(t)} \right)$$

Sur  $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ , on a

$$\vec{T}(t) = \frac{|\sin(t)|}{|\cos(2t)|} \begin{pmatrix} \cos(2t) \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = - \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } s'(t) = \frac{|\sin(t)|}{|\cos(2t)|} = -\frac{\sin(t)}{\cos(2t)}.$$

On peut écrire  $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$  avec  $\alpha(t) = t + \pi$

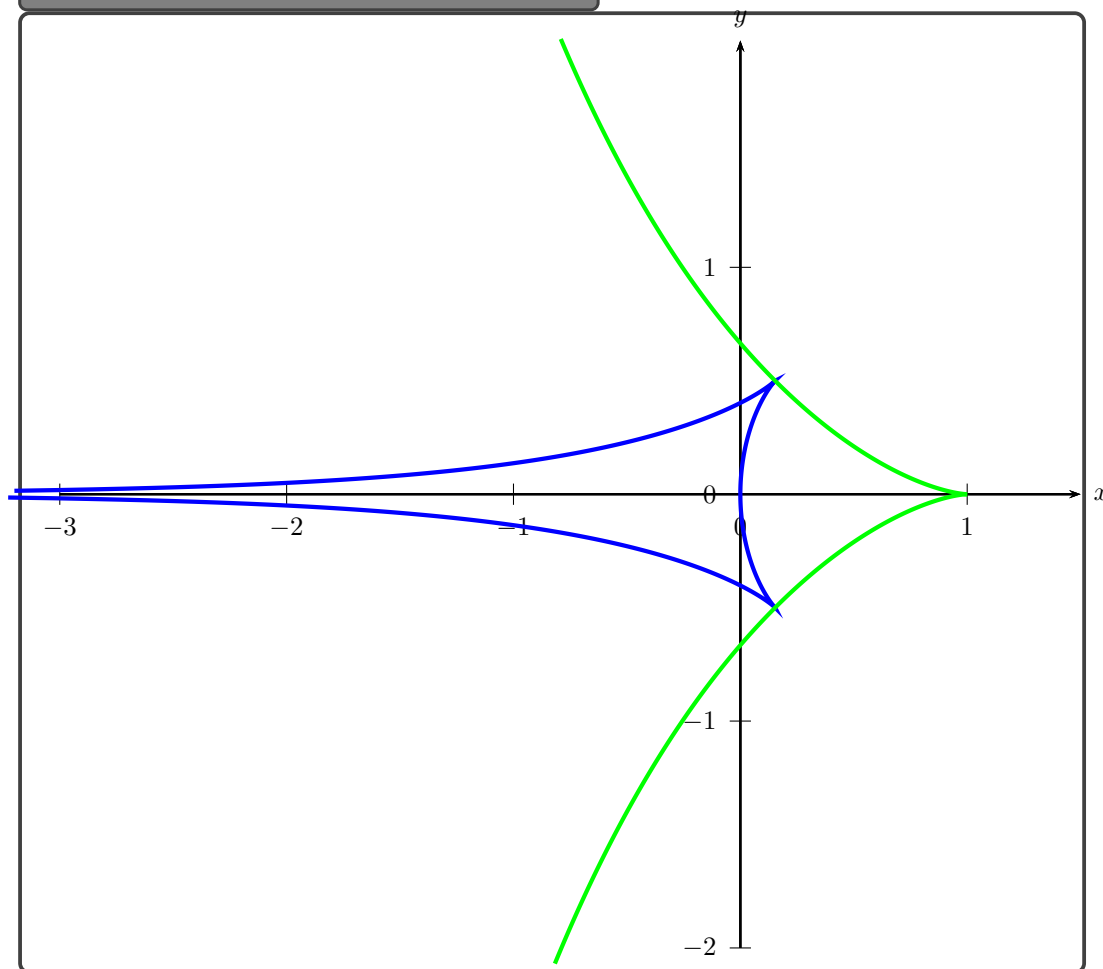
On a alors  $\gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = -\frac{\sin(t)}{\cos(2t)}$  et donc  $R(t) = -\frac{\cos(2t)}{\sin(t)}$

Le centre de courbure  $C(t)$  a alors pour coordonnées

$$(\cos^2(t) + \ln|\sin t|, \sin(t) \cos(t)) - \frac{\cos(2t)}{\sin(t)} (\sin(t), -\cos(t)) = \left( \sin^2(t) + \ln|\sin t|, \frac{\cos^3(t)}{\sin(t)} \right)$$

Un paramétrage de la développée est donc  $(D) : \begin{cases} x(t) = \sin^2(t) + \ln|\sin(t)| \\ y(t) = \frac{\cos^3(t)}{\sin(t)} \end{cases}$

Le tracé de la développée est alors le suivant

Figure .4 –  $(\mathcal{C})$  en bleu, sa développée en vert

### Corrigé de l'exercice 5

— On peut paramétrer  $(\mathcal{C})$  par  $\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = a \ln(\cos(t)) \end{cases}, t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

On a alors  $\begin{cases} x'(t) = a \\ y'(t) = -a \tan(t) \end{cases}$

Ainsi

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a^2 \tan^2(t)}} \begin{pmatrix} a \\ -a \tan(t) \end{pmatrix} = \frac{|\cos(t)|}{a} \begin{pmatrix} a \\ -a \tan(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } s'(t) = \frac{a}{\cos(t)}$$

En posant  $\alpha(t) = -t$  on a  $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } \gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = -\frac{\cos(t)}{a} \text{ et donc } R(t) = -\frac{a}{\cos(t)}$$

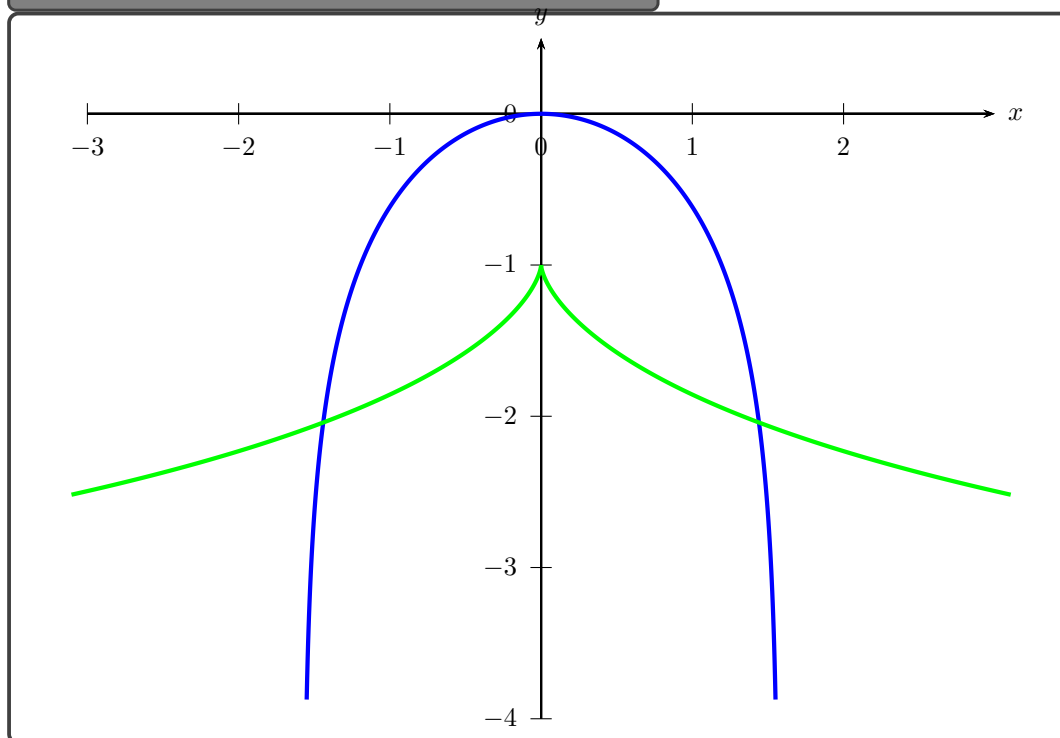
Le centre de courbure  $C(t)$  est alors le point de coordonnées

$$(at, a \ln(\cos(t))) + \frac{-a}{\cos(t)} (\sin(t), \cos(t)) = (a(t - \tan(t)), a(\ln(\cos(t)) - 1))$$

La développée  $(D)$  est ainsi paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = a(t - \tan(t)) \\ y(t) = a(\ln(\cos(t)) - 1) \end{cases}, t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Le tracé de la développée est alors le suivant (on a pris ici  $a = 1$ )

Figure .5 – la courbe en bleu, sa développée en vert



### Corrigé de l'exercice 6

- On va se placer dans le repère orthonormé direct d'origine  $O$ , centre du cercle et dont les axes sont les supports des deux diamètres sur lesquels on projette.

Dans ce repère, le cercle est paramétré par  $\begin{cases} x(t) = R \cos(t) \\ y(t) = R \sin(t) \end{cases}$  et, si  $M$  a pour coordonnées  $(R \cos(t), R \sin(t))$ , alors  $A$  a pour coordonnées  $(R \cos(t), 0)$  et  $B$   $(0, R \sin(t))$ .

Une équation de la droite  $(AB)$  est ainsi  $x \sin(t) + y \cos(t) = R \sin(t) \cos(t)$ .

Un vecteur normal à  $(AB)$  est  $\vec{n}$  de coordonnées  $(\sin(t), \cos(t))$ , ainsi le projeté orthogonal  $H$  de  $M$  sur  $(AB)$  a des coordonnées de la forme  $(R \cos(t) + \lambda \sin(t), R \sin(t) + \lambda \cos(t))$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

De plus  $H \in (AB)$ , donc  $\lambda = -R \sin(t) \cos(t)$ , d'où  $H$  a pour coordonnées  $(R \cos^3(t), R \sin^3(t))$ .

$(\Gamma)$  est ainsi la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = R \cos^3(t) \\ y(t) = R \sin^3(t) \end{cases}$

Étudions cette courbe

$x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques, de plus  $x$  est paire et  $y$  est impaire, on va ainsi limiter notre étude à  $[0, \pi]$  et on obtiendra le support complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

On a également, pour  $t \in [0, \pi]$ ,  $x(\pi - t) = -x(t)$  et  $y(\pi - t) = y(t)$ . On va donc limiter notre étude à  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et obtenir le support sur  $[0, \pi]$  par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $(Oy)$ .

Enfin, pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  on a  $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t)$  et  $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$ . On va donc limiter notre étude à  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et obtenir le support sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par une symétrie orthogonale par rapport la droite d'équation  $y = x$ .

Pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  on a

$$x'(t) = -3R \sin(t) \cos(t)^2 \leq 0 \quad \text{et} \quad y(t) = 3R \cos(t) \sin(t)^2 \geq 0$$

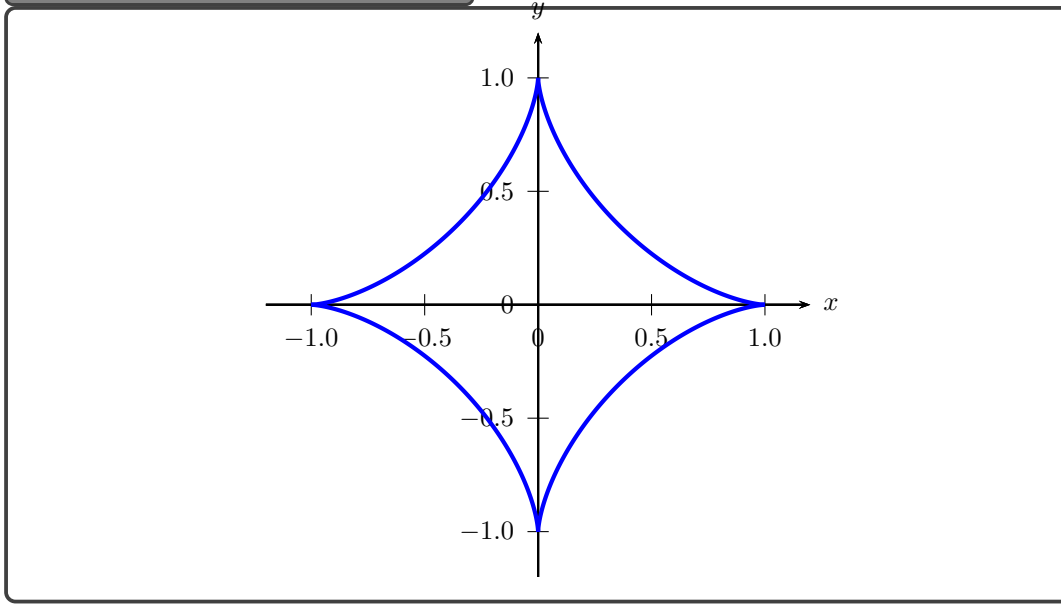
Le point de paramètre  $t = 0$  est singulier, au voisinage de  $t = 0$  on a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -3R \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 6R \end{pmatrix} + o(t^3)$$

La famille  $\left(\begin{pmatrix} -3R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6R \end{pmatrix}\right)$  est libre, ainsi le point de paramètre 0 est un point de rebroussement de première espèce.

On obtient le tracé suivant (on a pris  $R = 1$ )

Figure .6 – Tracé de  $\Gamma$ , une astroïde



2. La droite  $(AB)$  est la droite passant par  $A(t)$  de coordonnées  $(R \cos(t), 0)$  et dirigée par  $\vec{u}(t)$  de coordonnées  $(-\cos(t), \sin(t))$ .

On a  $\det(\vec{u}(t), \vec{u}'(t)) = \begin{vmatrix} -\cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  donc l'enveloppe  $(\mathcal{E})$  des droites  $(AB)$  existe bien.

On la cherche sous la forme  $f : t \mapsto A(t) + \lambda(t) \vec{u}(t)$  où  $\det(f'(t), \vec{u}(t)) = 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -R \sin(t) + \lambda(t) \sin(t) - \lambda'(t) \cos(t) & -\cos(t) \\ \lambda(t) \cos(t) + \lambda'(t) \sin(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = 0 & \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -R \sin(t) + \lambda(t) \sin(t) & -\cos(t) \\ \lambda(t) \cos(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow -R \sin^2(t) + \lambda(t) \sin^2(t) + \lambda(t) \cos^2(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda(t) = R \sin^2(t) \end{aligned}$$

La courbe  $(\mathcal{E})$  est ainsi la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = R \cos(t) - R \cos(t) \sin^2(t) = R \cos^3(t) \\ y(t) = R \sin^3(t) \end{cases}$$

On retrouve l'astroïde  $(\Gamma)$

3. On a vu qu'on pouvait limiter l'étude de  $\Gamma$  à l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et obtenir le support complet par diverses symétries. Il en va de même pour sa développée.

Soit  $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

$$x'(t) = -3R \sin(t) \cos(t)^2 \leq 0 \quad \text{et} \quad y(t) = 3R \cos(t) \sin(t)^2 \geq 0$$

On a

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{9R^2 \sin^2(t) \cos(t)^4 + 9R^2 \cos(t)^2 \sin(t)^4}} \begin{pmatrix} -3R \sin(t) \cos(t)^2 \\ 3R \cos(t) \sin(t)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3R \sin(t) \cos(t)} \begin{pmatrix} -3R \sin(t) \cos(t)^2 \\ 3R \cos(t) \sin(t)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où  $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$  et  $s'(t) = 3R \sin(t) \cos(t)$ .

En posant  $\alpha(t) = \pi - t$  on a alors  $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$

D'où, si  $t \neq 0$ ,

$$\gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = -\frac{1}{3R \sin(t) \cos(t)}$$

Et donc  $R(t) = -3R \sin(t) \cos(t)$

Le centre de courbure  $C(t)$  a donc pour coordonnées  $(R \cos^3(t) + 3R \sin^2(t) \cos(t), R \sin^3(t) + 3R \cos^2(t) \sin(t))$ .

Notons  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  notre repère orthonormé et considérons le repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ,  
où  $\vec{u} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$  et  $\vec{v} = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ .

Si un point  $M$  a pour coordonnées  $(x, y)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  alors ses coordonnées  $(X, Y)$  dans  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  vérifient

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

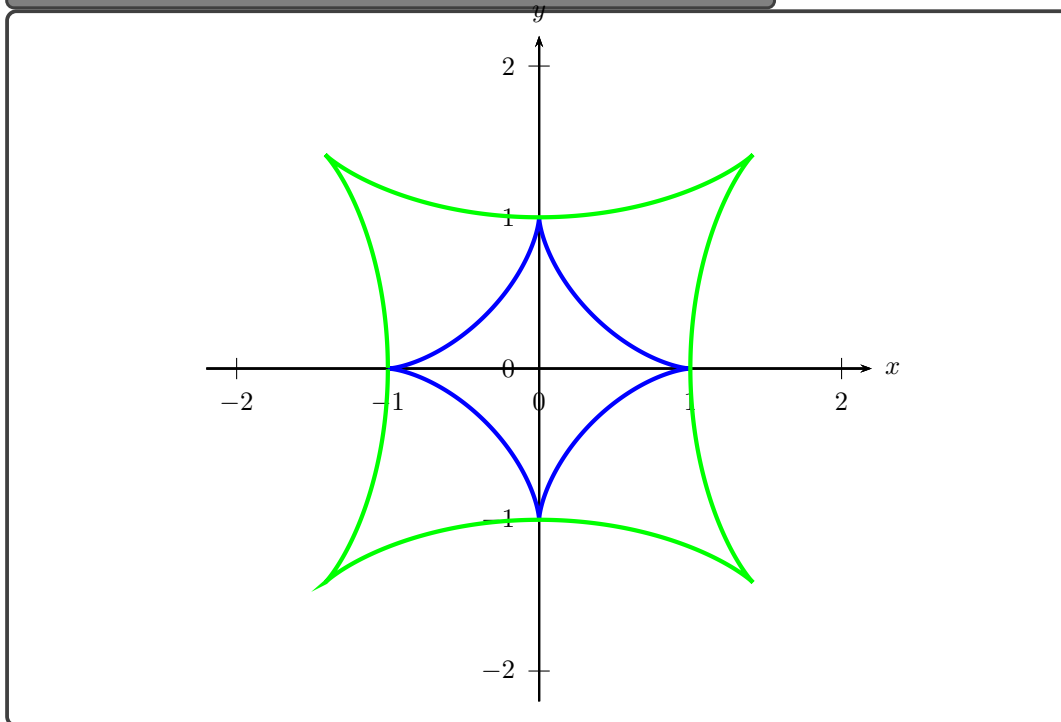
La développée de  $(\Gamma)$  est alors la courbe paramétrée dans ce nouveau repère par

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (R \cos^3(t) + 3R \sin^2(t) \cos(t) + R \sin^3(t) + 3R \cos^2(t) \sin(t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (-R \cos^3(t) - 3R \sin^2(t) \cos(t) + R \sin^3(t) + 3R \cos^2(t) \sin(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}} (\cos(t) + \sin(t))^3 \\ \frac{R}{\sqrt{2}} (\sin(t) - \cos(t))^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{2}^3 \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(t) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin(t) \right)^3 \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{2}^3 \left( \sin(t) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(t) \right)^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2R \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^3 \\ 2R \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalement la développée de  $(\Gamma)$  est alors la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} X(t) &= 2R \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^3 \\ Y(t) &= 2R \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ainsi la développée est une astroïde d'axe  $(OX)$  et de rayon  $2R$  privée de quatres points..

Figure .7 – Tracé de  $\Gamma$  (en bleu) et de sa développée (en vert)

### Corrigé de l'exercice 7

1. Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

$x$  est paire,  $y$  est impaire, on limite donc étude à  $[0, \pi]$  et on obtiendra le support complet par la symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$x'(t) = 2(\sin(t) - \sin(2t)) = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

$$y'(t) = 2(\cos t + \cos(2t)) = 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

| $t$     | 0 | $\frac{\pi}{3}$       | $\pi$ |   |
|---------|---|-----------------------|-------|---|
| $x'(t)$ | 0 | +                     | 0     | − |
| $x$     | 1 | $\frac{3}{2}$         | −3    |   |
| $y$     | 0 | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 0     |   |
| $y'(t)$ |   | +                     | 0     | − |

On a  $x'(0) = y'(0) = 0$ . Le point  $M(0)$  est un point singulier.

De plus, on a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{3}}{=} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \frac{(x - \frac{\pi}{3})^2}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{(x - \frac{\pi}{3})^3}{6} \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

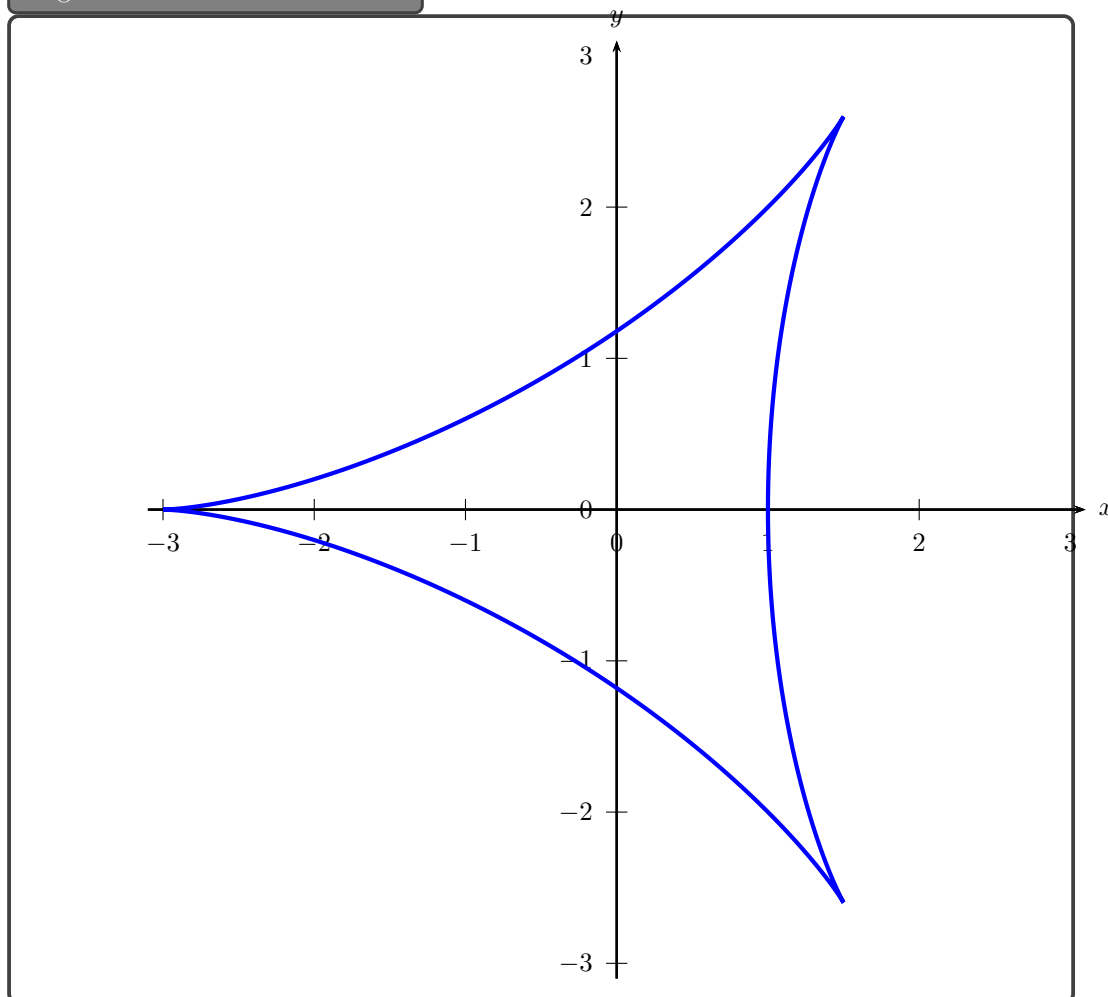
La famille  $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}\right)$  est libre. Le point  $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$  est donc un point de rebroussement de première espèce, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow \pi}{=} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(x - \pi)^2}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(x - \pi)^3}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + o\left((x - \pi)^3\right)$$

La famille  $\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$  est libre. Le point  $M(\pi)$  est donc un point de rebroussement de première espèce, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Le tracé de la courbe est le suivant

Figure .8 – Tracé de la deltoïde



2. — Pour  $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  on a

$$\begin{aligned}
\vec{T}(t) &= \frac{1}{\sqrt{16 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \cos^2\left(\frac{3t}{2}\right) + 16 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \cos^2\left(\frac{3t}{2}\right)}} \begin{pmatrix} 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \\ 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4 \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right|} \begin{pmatrix} 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \\ 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où  $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ . De plus  $s'(t) = 4 \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right| = 4 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$

En posant  $\alpha(t) = \frac{\pi - t}{2}$  on a alors  $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$

D'où  $\gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{-1}{8 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)}$  et donc  $R(t) = -8 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$ .

Le centre de courbure  $C(t)$  est alors le point de coordonnées

$$(2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) + \sin(2t)) - 8 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = (3 \cos(2t) + 6 \cos(t), 6 \sin(t) - 3 \sin(2t))$$

— Pour  $t \in \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right[$  on a

$$\begin{aligned}
\vec{T}(t) &= \frac{1}{4 \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right|} \begin{pmatrix} 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \\ 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où  $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ . De plus  $s'(t) = 4 \left| \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right| = -4 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$

En posant  $\alpha(t) = \frac{-\pi - t}{2}$  on a alors  $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$

D'où  $\gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{1}{8 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)}$  et donc  $R(t) = 8 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$ .

Le centre de courbure  $C(t)$  est alors le point de coordonnées

$$(2 \cos(t) - \cos(2t), 2 \sin(t) + \sin(2t)) + 8 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = (3 \cos(2t) + 6 \cos(t), 6 \sin(t) - 3 \sin(2t))$$

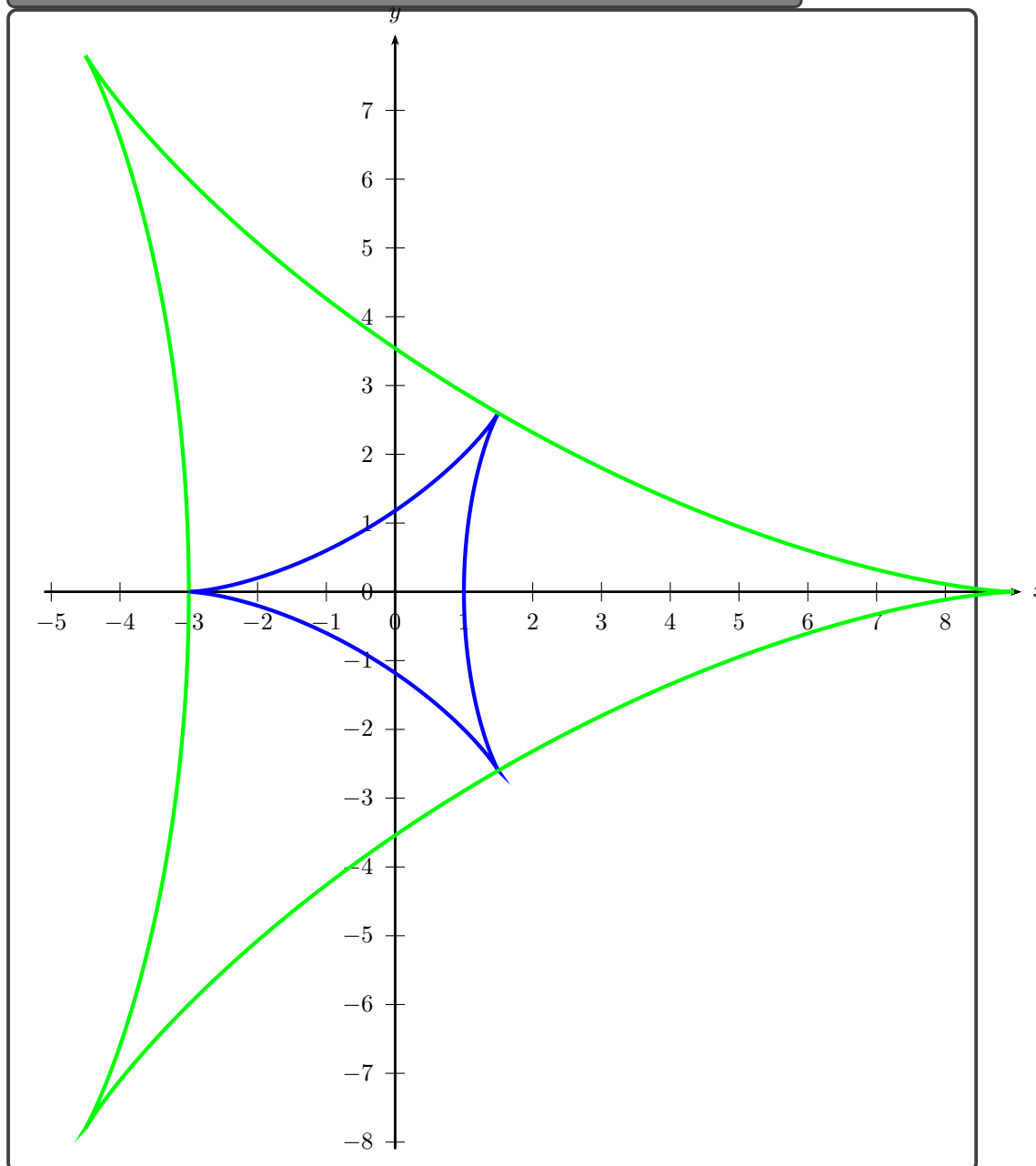
Finalement la développée est la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos(2t) + 6 \cos(t) \\ y(t) = 6 \sin(t) - 3 \sin(2t) \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{3}, \pi \right] \cup \left[ \pi, \frac{5\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right]$$

La transformation  $t \rightarrow \pi + t$  donne  $x(t + \pi) = -3(2 \cos(t) - \cos(2t))$  et  $y(t + \pi) = -3(2 \sin(t) + \sin(2t))$ .

On obtient donc la développée à partir de la courbe initiale par homothétie de centre  $O$ , de rapport  $-3$ .

Figure .9 – Tracé de la deltoïde (en bleu) et de sa développée (en vert)



### Corrigé de l'exercice 8

On reconnaît ici le paramétrage d'une branche de l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

La développée est l'enveloppe des normales à la courbe.

Le vecteur dérivé au point  $M(t)$  de paramètre  $t$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 2 \operatorname{sh}(t) \\ 3 \operatorname{ch}(t) \end{pmatrix}$  et un vecteur normal est le vecteur  $\vec{n}(t)$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} -3 \operatorname{ch}(t) \\ 2 \operatorname{sh}(t) \end{pmatrix}$

On a  $\det(\vec{n}(t), \vec{n}'(t)) = \begin{vmatrix} -3 \operatorname{ch}(t) & -3 \operatorname{sh}(t) \\ 2 \operatorname{sh}(t) & 2 \operatorname{ch}(t) \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ , l'enveloppe recherchée existe donc bien.

On cherche l'enveloppe sous la forme  $A(t) = M(t) + \lambda(t) \vec{n}(t)$  où  $\det(A'(t), \vec{n}(t)) = 0$ .

On a

$$\begin{aligned}
 \det(A'(t), \vec{n}(t)) &= \begin{vmatrix} 2\operatorname{sh}(t) - 3\lambda(t)\operatorname{sh}(t) - 3\operatorname{ch}(t)\lambda'(t) & -3\operatorname{ch}(t) \\ 3\operatorname{ch}(t) + 2\operatorname{ch}(t)\lambda(t) + 2\operatorname{sh}(t)\lambda'(t) & 2\operatorname{sh}(t) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2\operatorname{sh}(t) - 3\lambda(t)\operatorname{sh}(t) & -3\operatorname{ch}(t) \\ 3\operatorname{ch}(t) + 2\operatorname{ch}(t)\lambda(t) & 2\operatorname{sh}(t) \end{vmatrix} \\
 &= 2\operatorname{sh}(t)(2\operatorname{sh}(t) - 3\lambda(t)\operatorname{sh}(t)) + 3\operatorname{ch}(t)(3\operatorname{ch}(t) + 2\operatorname{ch}(t)\lambda(t)) \\
 &= 4\operatorname{sh}^2(t) - 6\lambda(t)\operatorname{sh}^2(t) + 9\operatorname{ch}^2(t) + 6\operatorname{ch}^2(t)\lambda(t) \\
 &= 6\lambda(t) + 9\operatorname{ch}^2(t) + 4\operatorname{sh}^2(t)
 \end{aligned}$$

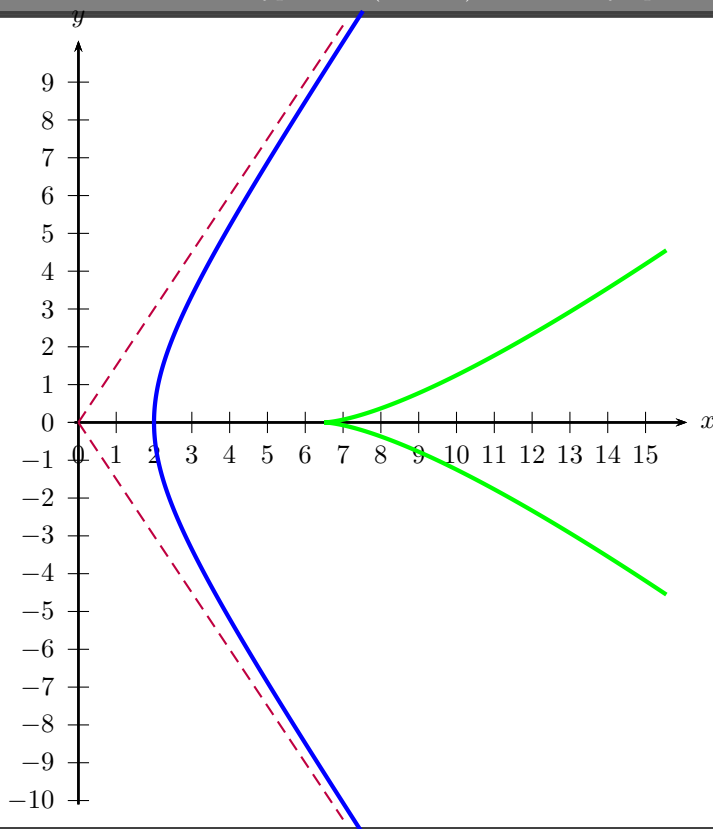
On a donc  $\lambda(t) = -\frac{9\operatorname{ch}^2(t) + 4\operatorname{sh}^2(t)}{6}$

Les coordonnées de  $C(t)$  sont alors

$$(2\operatorname{ch}(t), 3\operatorname{sh}(t)) - \frac{9\operatorname{ch}^2(t) + 4\operatorname{sh}^2(t)}{6}(-3\operatorname{ch}(t), 2\operatorname{sh}(t)) = \left( \frac{13\operatorname{ch}^3(t)}{2} - \frac{13\operatorname{sh}^3(t)}{3} \right)$$

La développée est ainsi la courbe paramétrée par  $\begin{cases} x(t) = \frac{13\operatorname{ch}^3(t)}{2} \\ y(t) = -\frac{13\operatorname{sh}^3(t)}{3} \end{cases}$

Figure .10 – Tracé de la branche d'hyperbole (en bleu) avec ses asymptotes et de sa développée (en vert)



### Corrigé de l'exercice 9

1.  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques,  $x$  est paire et  $y$  impaire. On va donc limiter notre étude à  $[0, \pi]$  et on obtiendra le support complet par symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$x'(t) = -3(\sin(t) + 2\sin(2t) + \sin(3t)) = -3(2\sin(2t)\cos(t) + 2\sin(2t)) = -6\sin(2t)(1 + \cos(t))$$

$$y'(t) = 3(\cos(t) + 2\cos(2t) + \cos(3t)) = 3(2\cos(2t)\cos(t) + 2\cos(2t)) = 6\cos(2t)(1 + \cos(t))$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

| $t$     | 0 | $\frac{\pi}{4}$                             | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---------|---|---------------------------------------------|-----------------|------------------|-------|
| $x'(t)$ | 0 | —                                           | 0               | +                | 0     |
| $x$     | 7 | $\swarrow$<br>$3$<br>$\searrow$             |                 |                  | —1    |
| $y$     | 0 | $\nearrow$<br>$3 + 2\sqrt{2}$<br>$\searrow$ |                 |                  | 0     |
| $y'(t)$ |   | +                                           | 0               | —                | 0     |

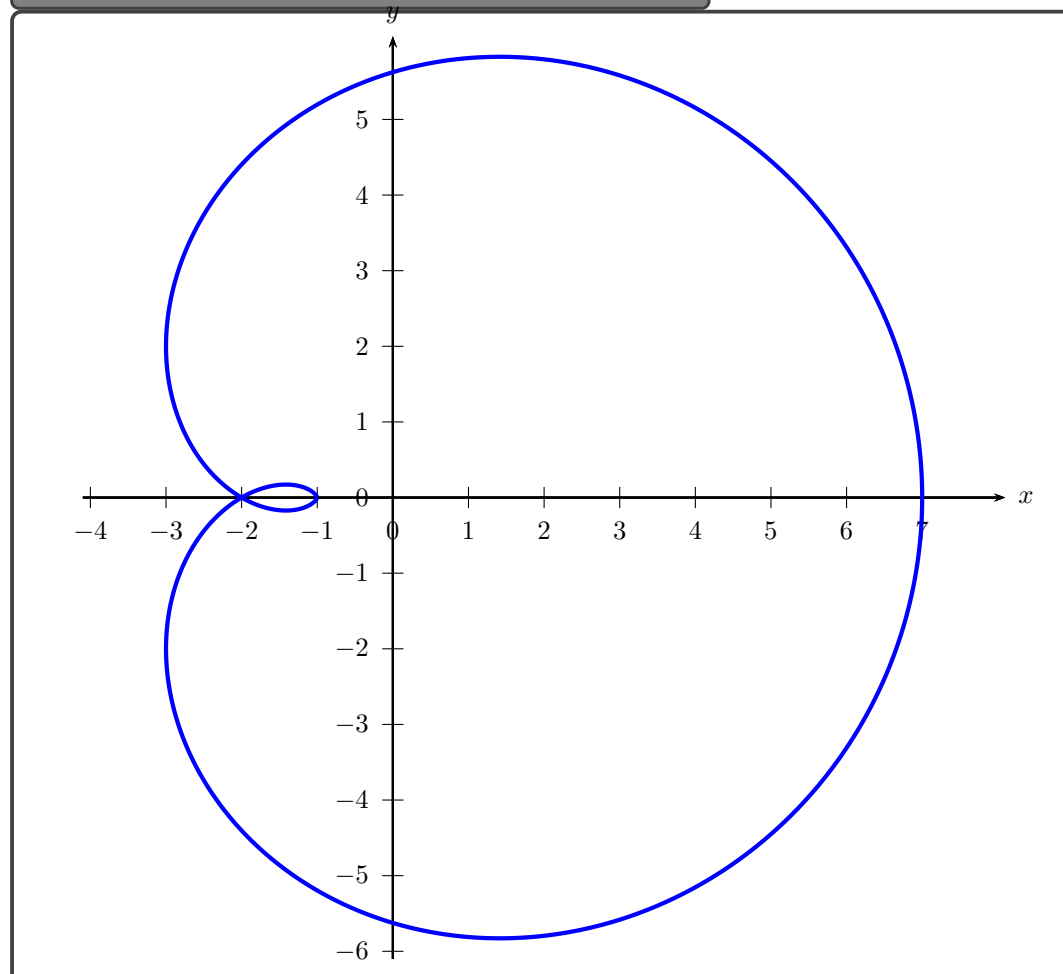
Au voisinage de  $\pi$  on a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{t \rightarrow \pi} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (t - \pi)3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (t - \pi)^4 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + o(t - \pi)^4$$

Ainsi le point de paramètre  $\pi$  est un point ordinaire.

On en déduit le tracé

Figure .11 – Tracé de la courbe, une sextique de Cayley



2. La longueur de  $(C)$  est

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{36 \sin^2(2t)(1 + \cos(t))^2 + 36 \cos^2(2t)(1 + \cos(t))^2} dt \\
 &= 2 \int_0^{\pi} 6|1 + \cos(t)| dt \\
 &= 12 \int_0^{\pi} 1 + \cos(t) dt \\
 &= 12 [t + \sin(t)]_0^{\pi} \\
 &= 12\pi
 \end{aligned}$$

$(C)$  est donc de longueur  $12\pi$

3. Pour  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} -6 \sin(2t)(1 + \cos(t)) \\ 6 \cos(2t)(1 + \cos(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$$

Et  $s'(t) = 6(1 + \cos(t))$ .

En posant  $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} + 2t$  on a alors  $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$

Ainsi, pour  $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , on a

$$\gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{1}{3(1 + \cos(t))} \quad \text{d'où } R(t) = 3 + 3 \cos(t)$$

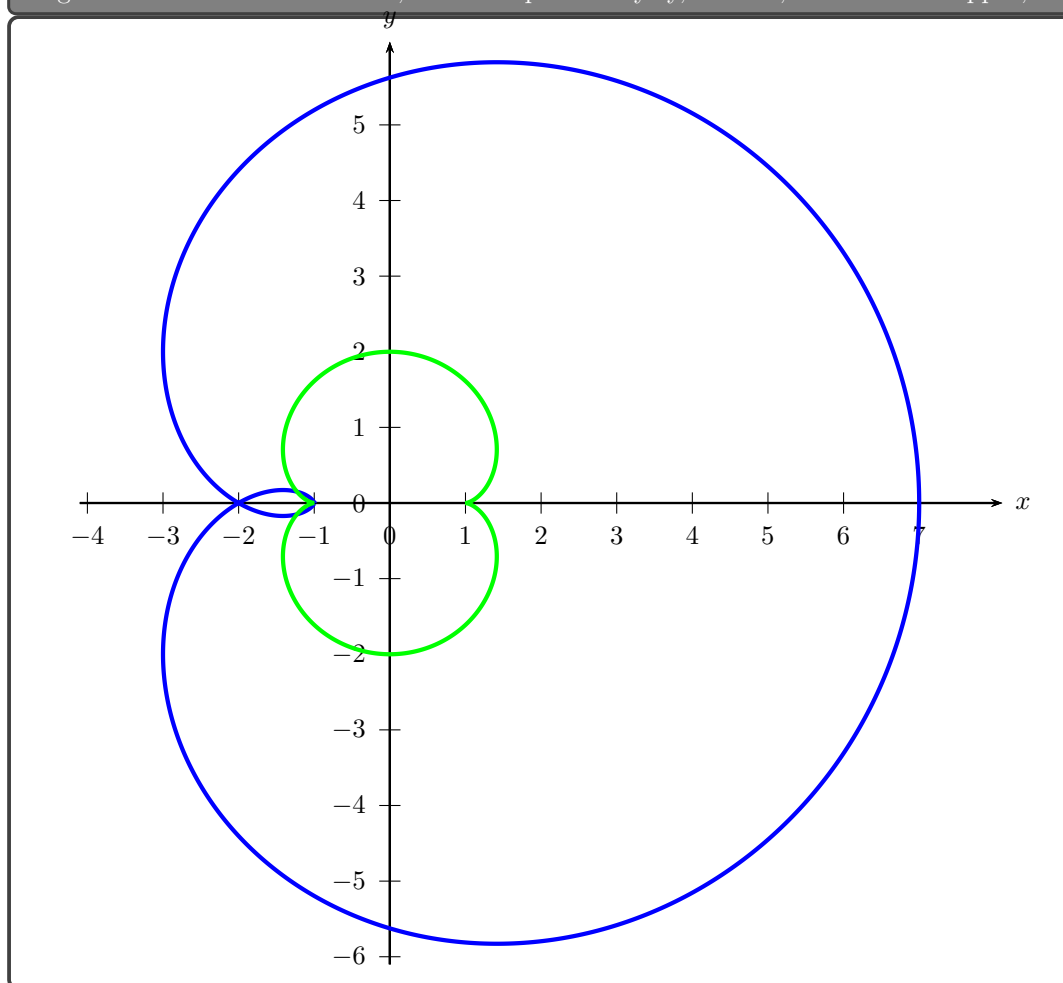
Le centre de courbure  $C(t)$  est alors le point de coordonnées

$$\begin{aligned}
 &(3 \cos(t) + 3 \cos(2t) + \cos(3t), 3 \sin(t) + 3 \sin(2t) + \sin(3t)) + (3 + 3 \cos(t)) (-\cos(2t), -\sin(2t)) \\
 &= (3 \cos(t) - 2 \cos^3(t), 2 \sin^3(t))
 \end{aligned}$$

La développée est donc paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos(t) - 2 \cos^3(t) \\ y(t) = 2 \sin^3(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Figure .12 – Tracé de la courbe, une sextique de Cayley, en bleu, et de sa développée, une néphroïde, en vert



### Corrigé de l'exercice 10

1. On peut paramétrer  $\Gamma$  par  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \ln(t) \end{cases}$  pour  $t > 0$ .

On a alors

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \frac{1}{t}$$

D'où

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \vec{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a également } s'(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= \frac{T'(t)}{s'(t)} \\
 &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \left( \frac{-t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \times \frac{1}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \\
 &= \frac{-t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \vec{N}(t)
 \end{aligned}$$

On a donc  $\gamma(t) = \frac{-t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

Par conséquent le rayon de courbure est  $\frac{-(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$

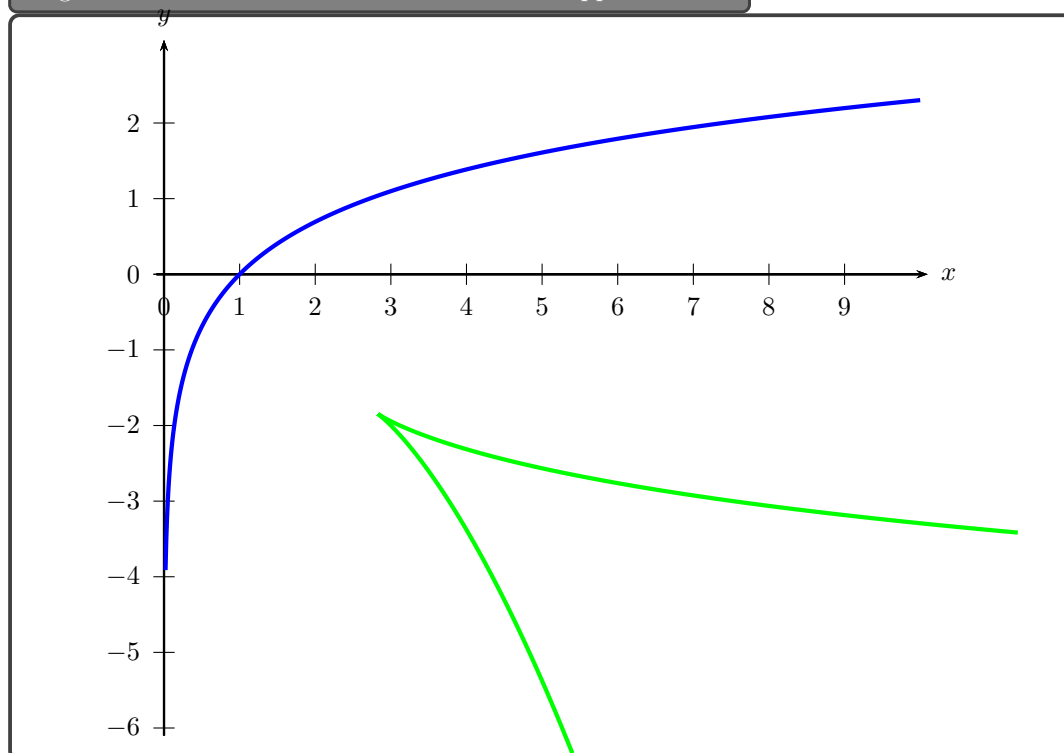
Le centre de courbure est alors le point  $C(t)$  de coordonnées

$$(t, \ln(t)) - \frac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} (-1, t) = \left( t + \frac{t^2+1}{t}, \ln(t) - t^2 - 1 \right)$$

La développée de  $\Gamma$  est la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{(t^2+1)}{t} \\ y(t) = \ln(t) - t^2 - 1 \end{cases} \quad t > 0$$

Figure .13 – Tracé de  $\Gamma$  en bleu et de sa développée en vert



2. Le rayon de courbure au point de paramètre  $t$  vaut  $\frac{-(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$ .

On va étudier la fonction  $f : t \mapsto \frac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$ .

Pour  $t > 0$  on a  $f'(t) = \frac{(2t^2-1)\sqrt{1+t^2}}{t^2}$ .

On en déduit la tableau de variations

|         |           |                                    |           |
|---------|-----------|------------------------------------|-----------|
| $t$     | 0         | $\frac{1}{\sqrt{2}}$               | $+\infty$ |
| $f'(t)$ |           | -                                  | 0 +       |
| $f$     | $+\infty$ | $\frac{3^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$ | $+\infty$ |

La valeur absolue du rayon de courbure est donc minimale au point de paramètre  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et ce minimum vaut  $\frac{3^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$

### Corrigé de l'exercice 11

1.  $C$  se paramètre par  $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{n} \operatorname{ch}(nt) \end{cases}$  pour  $t \in [0, 1]$ .

Sa longueur est alors

$$\begin{aligned}
 L_C &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(nt)} dt \\
 &= \int_0^1 \operatorname{ch}(nt) dt \\
 &= \left[ \frac{\operatorname{sh}(nt)}{n} \right]_0^1 \\
 &= \frac{\operatorname{sh}(n)}{n}
 \end{aligned}$$

La longueur de  $C$  est alors  $\frac{\operatorname{sh}(n)}{n} = \frac{e^n - e^{-n}}{2n}$ .

2. Pour  $t \in [0, 1]$  on a

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(nt)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sh}(nt) \end{pmatrix} = \frac{1}{\operatorname{ch}(nt)} \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sh}(nt) \end{pmatrix}$$

D'où  $\vec{N}(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(nt)} \begin{pmatrix} -\operatorname{sh}(nt) \\ 1 \end{pmatrix}$ .

De plus  $s'(t) = \operatorname{ch}(nt)$ .

Ainsi

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{ds} &= \frac{T'(t)}{s'(t)} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{ch}(nt)} \left( \frac{-n \operatorname{sh}(nt)}{\operatorname{ch}^2(nt)} \begin{pmatrix} 1 \\ \operatorname{sh}(nt) \end{pmatrix} + \frac{1}{\operatorname{ch}(nt)} \begin{pmatrix} 0 \\ n \operatorname{ch}(nt) \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{\operatorname{ch}(nt)^3} \begin{pmatrix} -n \operatorname{sh}(nt) \\ -n \operatorname{sh}(nt)^2 + n \operatorname{ch}(nt)^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{ch}(nt)^3} \begin{pmatrix} -n \operatorname{sh}(nt) \\ n \end{pmatrix} \\
 &= \frac{n}{\operatorname{ch}(nt)^2} \vec{N}(t)
 \end{aligned}$$

On a donc  $\gamma(t) = \frac{n}{\text{ch}(nt)^2}$  et donc  $R(t) = \frac{\text{ch}(nt)^2}{n}$ .

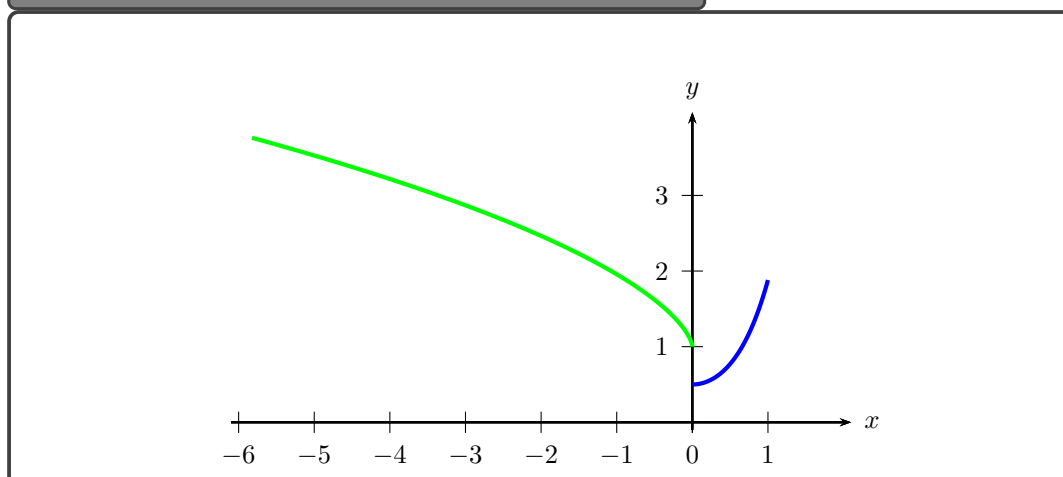
Le centre de courbure  $C(t)$  a alors pour coordonnées

$$\left(t, \frac{1}{n} \text{ch}(nt)\right) + \frac{\text{ch}(nt)^2}{n} \times \frac{1}{\text{ch}(nt)} (-\text{sh}(nt), 1) = \left(t - \frac{\text{ch}(nt) \text{sh}(nt)}{n}, \frac{2}{n} \text{ch}(nt)\right) = \left(t - \frac{\text{sh}(2nt)}{2n}, \frac{2}{n} \text{ch}(nt)\right)$$

$\Gamma$  est ainsi paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t - \frac{\text{sh}(2nt)}{2n} \\ y(t) = \frac{2}{n} \text{ch}(nt) \end{cases}$$

Figure .14 – Tracé de  $C$  en bleu et de  $\Gamma$  en vert ( $n = 2$ )



3. La longueur de  $\Gamma$  est

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \int_0^1 \sqrt{(1 - \text{ch}(2nt))^2 + 4 \text{sh}(nt)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 - 2 \text{ch}(2nt) + \text{ch}(2nt)^2 + 4 \text{sh}(nt)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 - 2(\text{ch}(nt)^2 + \text{sh}^2(nt)) + \text{ch}(2nt)^2 + 4 \text{sh}(nt)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 - 2 \text{ch}(nt)^2 + 2 \text{sh}^2(nt) + \text{ch}(2nt)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\text{ch}(2nt)^2 - 1} dt \\ &= \int_0^1 |\text{sh}(2nt)| dt \\ &= \int_0^1 \text{sh}(2nt) dt \\ &= \left[ \frac{\text{ch}(2nt)}{2n} \right]_0^1 \\ &= \frac{\text{ch}(2n) - 1}{2n} \end{aligned}$$

$\Gamma$  est ainsi de longueur  $\frac{\text{ch}(2n) - 1}{2n}$ .